

# ¿Es fácil resolver un sistema lineal $2 \times 2$ en una computadora?

## Laboratorio de Álgebra Lineal

Dr. Humberto Madrid de la Vega.

1. ¿Cuál crees que sea la respuesta a la pregunta formulada en el título de este laboratorio? ☐ Sí ☐ No

2. Considera el sistema

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2\end{aligned}$$

supongamos que  $a_{11} \neq 0$  y además que el sistema tiene solución única. Apliquemos el método de eliminación. Sea  $m = a_{21}/a_{11}$ . Multiplicando la primera ecuación por  $m$  y restándola a la segunda obtenemos

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ (a_{22} - ma_{12})x_2 &= b_2 - mb_1\end{aligned}$$

De aquí que

$$x_2 = \frac{b_2 - mb_1}{a_{22} - ma_{12}}$$

y por sustitución hacia atrás

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$$

Escribir un programa que resuelva el sistema.

Probar el programa con un sistema sencillo como

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\ 2x + 3y &= 5\end{aligned}$$

cuya solución exacta es  $x = 1, y = 1$ .

3. Considera ahora el sistema

$$\begin{aligned}10^{-n}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2\end{aligned}$$

Observa que cuando  $n$  crece  $x_1 \approx 1$  y también  $x_2 \approx 1$ . Aun más,  $x_2 < 1$  y  $x_1 > 1$  (¿por qué?). Resuelve este sistema para  $n = 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18$  y haz una tabla con los resultados. Comenta los resultados.

4. Repite el ejercicio anterior con el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\ 10^{-n}x_1 + x_2 &= 1\end{aligned}$$

el cual tiene la misma solución que el sistema del ejercicio anterior(¿o no?).

Comentar los resultados y compararlos con los del ejercicio anterior. ¿Puedes explicar los resultados?

5. Ahora considera el sistema

$$\begin{aligned}1.2969x_1 + 0.8648x_2 &= 0.8642 \\ 0.2161x_1 + 0.1441x_2 &= 0.1440\end{aligned}$$

cuya solución exacta es  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ .

- (a) Resuelve el sistema con el programa. ¿Cuál es el resultado?
  - (b) Vamos a modificar un poquito el sistema anterior. Ahora  $b_2 = 0.1441$ . Asegúrate de introducir bien los datos. Antes de resolver el sistema en la computadora piensa en cuál debería ser el resultado. Ahora resuelve el sistema en la computadora. ¿El resultado se parece al que esperabas?
  - (c) Repetir el inciso anterior, ahora con  $b_2 = 0.1439$ . Comparar los resultados. ¿Puedes explicarlos?
6. ¿Cómo sabemos si un punto  $(x_1^*, x_2^*)$  es una buena solución de un sistema de ecuaciones? Teóricamente deben satisfacer exactamente el sistema de ecuaciones. En la práctica no podemos aspirar a tanto y nos tenemos que conformar con que “casi” satisfagan el sistema de ecuaciones. Es decir, si calculamos los residuos

$$\begin{aligned}r_1 &= a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* - b_1 \\ r_2 &= a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* - b_2\end{aligned}$$

y ambos,  $r_1$  y  $r_2$  son pequeños podemos suponer que  $(x_1^*, x_2^*)$  es una buena aproximación a la solución exacta del sistema de ecuaciones. ¿Suena esto razonable? Considera ahora el sistema

$$\begin{aligned}0.780x_1 + 0.563x_2 &= 0.217 \\ 0.913x_1 + 0.659x_2 &= 0.254\end{aligned}$$

Supongamos que dos personas encuentran por distintos métodos dos soluciones

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} .341 \\ -.087 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} .999 \\ -1.000 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcula los residuos para cada uno de estos vectores y determina cuál sería el mejor resultado.
- (b) Verifica que la solución exacta es  $(1, -1)$
- (c) ¿Puedes explicar los resultados?

7. Responde de nuevo la pregunta 1.